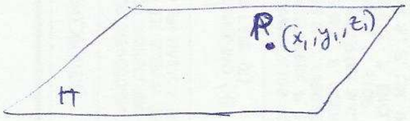
HALLA K DE FORMA QUE LOS PUNTOS $(1,-1,0)$, $(0,1,K)$, $(-1,0,2)$, Y $(2,0,0)$ SEAN COPLANARIOS

SE LLAMAN PUNTOS COPLANARIOS LOS QUE ESTÁN EN EL MISMO PLANO.
SI UN PUNTO ESTÁ EN UN PLANO, CUMPLE LA ECUACIÓN DE ESE PLANO:



$$\boxed{\pi: Ax + By + Cz + D = 0}$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

LOS CUATRO PUNTOS, PARA ESTAR EN UN PLANO, DEBEN CUMPLIR SU ECUACIÓN:

$$\left\{\begin{array}{l} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \\ Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 1\cdot A - 1B + 0C = -D \\ 0A + 1B + KC = -D \\ -1A + 0B + 2C = -D \\ 2A + 0B + 0C = -D \end{array}\right.$$

A = ___
B = ___
C = ___

EL SISTEMA DEBE SER COMPATIBLE DETERMINADO [CON UNA ÚNICA SOLUCIÓN]
EL PLANO

1. PODEMOS ESTUDIARLO UTILIZANDO EL TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS QUE DICE QUE UN SISTEMA ES COMPATIBLE CUANDO LOS RANGOS DE LAS MATRICES M Y M* (DE LOS COEFICIENTES, Y AMPLIADA CON LOS TÉRMINOS INDEPENDIENTES) SON IGUALES. Y QUE, ADEMÁS, ES DETERMINADO, CUANDO ESE RANGO COINCIDE CON EL NÚMERO DE INCÓGNITAS.

EN NUESTRO CASO:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & K \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & K & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A, B, C
nº INCÓGNITAS = 3

⇒ DEBERÁ CUMPLIRSE QUE $\boxed{\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 3}$

EL RANGO DE UNA MATRIZ ES EL NÚMERO DE FILAS (O COLUMNAS) QUE TIENE LINEALMENTE INDEPENDIENTES, ES DECIR, QUE NO PUEDEN ESCRIBIRSE COMO COMBINACIONES LINEALES DE LAS OTRAS.

EL MÁXIMO RANGO DE UNA MATRIZ 4×3 COMO M ES 3.

¿CÓMO HALLAMOS EL RANGO? UNA POSIBILIDAD ES HACER TRANSFORMACIONES ELEMENTALES (MÉTODO DE GAUSS) HASTA CONSEGUIR UNA MATRIZ ESCALONADA:

- (1) INTERCAMBIAR FILAS
- (2) MULTIPLICAR FILAS POR ESCALARES
- (3) SUMAR FILAS, MULTIPLICADAS PREVIAMENTE POR ESCALARES

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & K \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2+F_1 \\ F_3 \to F_3-2F_1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & K \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3+2F_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & K \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_4 \to F_4+F_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & K+2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

COMO VEMOS, EL RANGO ES 3 PORQUE HAY TRES FILAS EN LAS QUE NO TODOS SUS ELEMENTOS SON CEROS.

POR OTRA PARTE, LA 3ª Y LA 4ª SON PROPORCIONALES

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4(K+2)-4(K+2) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rango}(M)=3$$

PIVOTES

COLUMNAS PIVOTALES (3)

¿CUÁL ES EL RANGO DE M^*? ESTA MATRIZ, 4×4, PODRÍA TENER RANGO IGUAL A 4. COMO ES CUADRADA, PODEMOS UTILIZAR SU DETERMINANTE PARA CALCULAR EL RANGO.

Si $|M^*| = 0 \Rightarrow \text{rango}(M^*) \neq 4$ (SERÍA 3 COMO EL DE M)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & K & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & K & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DESARROLLAMOS EL DETERMINANTE DE M^* POR LOS ELEMENTOS DE LA PRIMERA COLUMNA:

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 1 & K & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2-4K+4+K = -3K+6 = 0 \rightarrow \boxed{K=2}$$

POR TANTO, PARA QUE EL SISTEMA SEA COMPATIBLE Y DETERMINADO (ES DECIR, QUE LOS 4 PUNTOS SEAN COPLANARIOS), K DEBE VALER 2, PORQUE EN ESE CASO $\boxed{\text{rango}(M) = \text{Rango}(M^*) = 3}$

② TAMBIÉN PODEMOS ESTUDIAR EL SISTEMA POR GAUSS:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & K & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4-2F_1]{F_3 \to F_3+F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & K & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \to 2F_3+F_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & K & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad \rightarrow$$

$$\cancel{F_4 \to 2F_4 - F_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2K & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}}$$

$4 \cdot 2K - 2K \cdot 4$

$$F_4 \to F_4 - 2F_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & K & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2K & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \times 2K \\ 4 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & K & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6K+12 \end{bmatrix}$$

$-3 \cdot 2K + 4 \cdot 3$
$-6K + 12$

SISTEMA EQUIVALENTE AL PRIMERO $\longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} A - B &= -D \\ B + KC &= -D \\ 4C &= -3D \\ \boxed{0} &\boxed{= -6K+12} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{K = 2}$$

SI QUEREMOS HALLAR EL PLANO EN EL ESTÁN CONTENIDOS LOS CUATRO PUNTOS:

$$\left\{\begin{aligned} A - B &= -D \\ B + 2C &= -D \\ 4C &= -3D \end{aligned}\right. \quad \cancel{\left(\begin{aligned} A - B + D &= 0 \\ B + 2C + D &= 0 \\ 4C + 3D &= 0 \end{aligned}\right)}$$

3 ecuaciones, 4 incógnitas $\longrightarrow$ necesitamos un parámetro $\lambda = D$

$$\begin{aligned} A - B &= -\lambda \\ B + 2C &= -\lambda \\ 4C &= -3\lambda \end{aligned} \quad \Bigg| \quad C = -\frac{3}{4}\lambda \;;\; B = -\lambda - 2C = -\lambda - 2\left(-\frac{3}{4}\lambda\right) = -\lambda + \frac{3}{2}\lambda = \frac{1}{2}\lambda$$

$$A = -\lambda + B = -\lambda + \frac{1}{2}\lambda = -\frac{1}{2}\lambda$$

CAMBIAMOS DE PARÁMETRO POR COMODIDAD

$\frac{1}{4}\lambda = \mu$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}\lambda = 2\mu$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= -2\mu \\ B &= 2\mu \\ C &= -3\mu \end{aligned}} \qquad \boxed{-2x + 2y - 3z + D = 0}$$

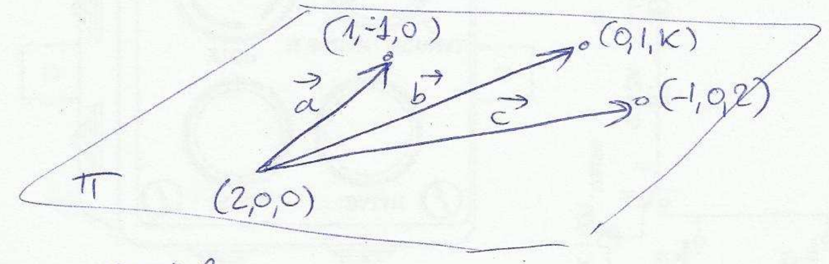
TODOS LOS PLANOS PARALELOS

SÓLO QUEDA HALLAR D CON UNO DE LOS PUNTOS:

$$(2,0,0) \longrightarrow -2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = -D$$
$$-4 = -D \qquad D = 4$$

$$\boxed{-2x + 2y - 3z + 4 = 0}$$

③ POR ÚLTIMO, CONSIDERANDO VECTORES EN LUGAR DE PUNTOS, Y SABIENDO QUE TRES VECTORES EN UN PLANO CONSTITUYEN UN SISTEMA LIGADO (ES DECIR, QUE SON LINEALMENTE DEPENDIENTES) (EN UN PLANO, EL MÁXIMO NÚMERO DE VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES ES 2.), FORMAMOS TRES VECTORES CON NUESTROS CUATRO PUNTOS:



$\vec{a} = (-1,-1,0)$
$\vec{b} = (-2,1,K)$
$\vec{c} = (-3,0,2)$

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{bmatrix}$$

EL RANGO DE LA MATRIZ A, POR TANTO, NO PUEDE SER 3, PORQUE SI LOS TRES VECTORES ESTÁN EN EL MISMO PLANO, SON LINEALMENTE DEPENDIENTES (O LO QUE ES LO MISMO, NO PUEDEN SER LINEALMENTE INDEPENDIENTES)

PODRÍA SER EL RANGO 1:

O BIEN 2, O BIEN 1, PERO NO 3.

↓ POR LO TANTO

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & K & 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \boxed{|A| = 0}$$

$$|A| = -2 + 3K - 4 = 0 \rightarrow 3K = 6 \; ; \; \boxed{K = 2}$$